



● داود معصومی مهوار  
استدلال‌هایی برای احتمال

## مهره‌ها در کیسه‌تاریک

### توضیحات زهرا:

اگر مهره اول قرمز باشد، آن‌گاه احتمال قرمز بودن مهره دوم  $\frac{4}{11}$  است.

اگر مهره اول آبی باشد، آن‌گاه احتمال قرمز بودن مهره دوم  $\frac{5}{11}$  است.

● سایه: برادرم به کمک همین دو مطلب راه‌حلش را توضیح داد. او گفت احتمال اینکه حالت اول پیش بیاید،  $\frac{5}{12}$  است و احتمال اینکه حالت دوم پیش بیاید،  $\frac{7}{12}$  است. او گفت احتمال قرمز بودن مهره دوم به شرط قرمز بودن مهره اول  $\frac{4}{11}$  است و احتمال قرمز بودن مهره دوم به شرط آبی بودن مهره اول،  $\frac{5}{11}$  است. در نهایت هم گفت که احتمال قرمز بودن مهره دوم، مجموع این دو عدد است؛ یعنی:

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{5 \times 4 + 5 \times 7}{12 \times 11} = \frac{5 \times 11}{12 \times 11} = \frac{5}{12}$$

### توضیحات برادر سایه

احتمال قرمز بودن مهره دوم به شرط قرمز بودن مهره اول،  $\frac{4}{11}$  است. احتمال قرمز بودن مهره دوم به شرط آبی بودن مهره اول،  $\frac{5}{11}$  است. احتمال قرمز بودن مهره دوم می‌شود:

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{5 \times 4 + 5 \times 7}{12 \times 11} = \frac{5 \times 11}{12 \times 11} = \frac{5}{12}$$

● من: خب، برادر سایه از یکی دو تا قضیه کمک گرفته و عدد‌ها را در هم ضرب و گاهی جمع کرده و بالاخره به نتیجه رسیده

● سایه: سلام خانم. لطفاً با تمرین ۳ کار را شروع کنیم. گویا این تمرین از محدوده درسی ما بیرون است! برادرم دانشجوست و راه‌حلی برای آن نوشت که مربوط به احتمال شرطی است. من تقریباً فهمیدم راه‌حل چه بود.

● اعظم: من هم نتوانستم این مسئله را حل کنم، ولی وقتی راه‌حل‌های پیشرفته و پاسخ نهایی آن‌ها را دیدم، چیزی به ذهنم رسید که اصلاً شبیه استدلال نیست، ولی به نظر درست می‌آید.

● من: خب بهتر است شروع کنیم. یک نفر خود مسئله را بازگو کند تا گفت‌وگوهای بعدی روشن‌تر پیش بروند.

تمرین ۳. در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۷ مهره آبی هست. یک مهره از کیسه بیرون می‌کشیم و بدون آنکه رنگش را ببینیم، آن را در کشوی میز می‌گذاریم. سپس مهره دیگری را از کیسه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره دوم قرمز باشد، چقدر است؟

● زهرا: اگر می‌دانستیم مهره اول چه رنگی بوده است، کار خیلی ساده پیش می‌رفت. همه در این باره نظری یکسان داریم. اگر مهره اول قرمز باشد، الان باید در کیسه ۴ مهره قرمز و ۷ مهره آبی مانده باشد. پس احتمال قرمز بودن مهره دوم  $\frac{4}{11}$  است. اما اگر مهره اول آبی باشد، الان باید در کیسه ۵ مهره قرمز و ۶ مهره آبی مانده باشد و در این صورت احتمال قرمز بودن مهره دوم  $\frac{5}{11}$  است. اما همه می‌دانیم که مسئله هیچ یک از این دو حالت نیست. در واقع ما از رنگ مهره اول خبر نداریم.

است، اما ما هیچ یک از آن قضیه‌ها را بلد نیستیم. پس راه او برای ما پذیرفته نیست.

● **اعظم:** من هم نفهمیدم که چرا باید آن عددها را آن جور در هم ضرب و سپس با هم جمع کرد! ولی یک چیز برایم جالب بود که آن هم نتیجه نهایی محاسبه‌هاست. ببینید، نتیجه  $\frac{5}{12}$  است! انکار از همان اول می‌خواهیم از کیسه یک مهره بیرون بکشیم و احتمال قرمز بودن آن را حساب کنیم! به نظر من بی‌ربط نیست. اگر رنگ مهره اول را می‌دانستیم، احتمال  $\frac{4}{11}$  یا  $\frac{5}{11}$  می‌شد، ولی رنگ مهره اول را نمی‌دانیم و مطمئناً هیچ یک از این دو عدد درست نیستند و  $\frac{5}{12}$  به نظر درست می‌رسد.

● **مریم:** اعظم به خوبی آن دو عدد را رد می‌کند، ولی برای درستی  $\frac{5}{12}$  استدلالی نمی‌آورد.

● **اعظم:** بین مریم، فکر کن که کیسه‌ای با ۵ مهره قرمز و ۷ مهره آبی داری و یک مهره از آن بیرون می‌آوری. روشن است که احتمال قرمز بودن آن  $\frac{5}{12}$  است. حالا فکر کن که وقتی می‌خواستی مهره را بیرون بیاوری، اول یکی از مهره‌های درون کیسه را در گوشه‌ای از کیسه جدا نگه می‌داشتی و سپس از بقیه مهره‌ها یکی بیرون می‌کشیدی. معلوم است که هنوز احتمال قرمز بودن مهره بیرون آمده  $\frac{5}{12}$  است.

● **مریم:** (و عده‌ای دیگر): این چه حرفی است؟! حالا که دو تا عدد یکی هستند، نباید چنین حرفی بزنی. در این حالتی که گفתי فضای نمونه و پیشامدهای ممکن تغییری نمی‌کنند، ولی در تمرین ۳ چنین وضعی نداریم! در تمرین ۳، مهره اول واقعاً از انتخاب‌ها کنار گذاشته شده است. آن مهره در کشو است و دیگر امکان بیرون آمدن از کیسه را ندارد، ولی اینجا آن مهره‌ای که در کیسه گوشه‌نشینی کردی، هنوز می‌توانست از کیسه بیرون بیاید. این دو حالت فرق دارند!

● **لیلا:** خوب وقتی اعظم آن مهره را به گوشه‌ای می‌راند و تصمیم می‌گیرد آن را از کیسه بیرون نیاورد، هنوز فکر می‌کنید امکان بیرون آمدن آن از کیسه هست؟

● **زهرا:** مثل اینکه این مسئله اعظم و لیلا را از ما گرفته است! آخر این چه جور استدلالی است؟

● **لیلا:** خوب جور دیگری تصور کنید. فکر کنید این کیسه با همین تعداد مهره‌ها را در اتاق تاریکی داشته باشید. مهره‌ها را بیرون بکشید و دو تا را روی یخچال بگذارید، دو تا کف اتاق رها کنید، سه تا را داخل کشوی میز بگذارید، چهار تا را لب پنجره بگذارید و آخری را هم مثلاً روی طاقچه بگذارید. حالا اگر موقع راه رفتن پایتان روی یک مهره کف اتاق برود، احتمال قرمز بودن آن چقدر است؟ با  $\frac{5}{12}$  فرق می‌کند؟ چه فرقی؟

● **الهام:** می‌دانم می‌خواهی بگویی تنها فرق این است که کیسه بزرگ‌تر شده است و اتاق مثل خود کیسه است. من هم چنین حسی دارم، ولی این استدلال نیست. نمی‌دانم چه جوری باید درست یا نادرست بودن حس خودم را بررسی کنم. راستی خانم چرا شما چیزی نمی‌گویید؟

● **من:** برای اینکه خوب دارید پیش می‌روید. انحرافی ندارید.

● **زهرا:** آخر این حرف‌ها و حس‌های بی‌دلیل انحراف نیست؟

● **اعظم:** پیش از کلاس و حتی اول بحث من خودم خیلی از گفته‌هایم مطمئن نبودم، ولی الان با دفاع لیلا و مهم‌تر از آن،

اعتراض الهام، منظم‌تر و روشن‌تر فکر می‌کنم. امیدوارم بتوانم استدلالم را روشن بیان کنم. ولی پیش از بیان استدلال اصلی یک مورد دیگر را هم از من بشنوید.

فرض کنید پس از مهره اول مهره دوم را هم بی‌آنکه ببینیم بیرون بکشیم و در کشو بگذاریم. مهره سوم را هم همین جور و ادامه بدهیم و تک تک مهره‌ها را بیرون بکشیم و بدون نگاه کردن در کشو جای بدهیم تا تنها یک مهره در کیسه بماند. خوب حالا این مهره آخری را بیرون می‌آوریم. احتمال قرمز بودن آن چقدر است؟

حتی زهرا هم ساکت شده بود و فکر می‌کرد. این مثال‌ها نظر بعضی‌ها را برگردانده بود. اما نفیسه همان نظر را تکرار کرد.

● **نفیسه:** نمی‌دانم احتمال قرمز بودن مهره آخر چقدر است. یک مهره را بدون نگاه کردن در کشو گذاشته بودیم و آن همه اختلاف نظر و علامت سؤال داشتیم. حالا که این همه مهره بیرون کشیده‌ایم و بدون دانستن رنگ آن‌ها، در کشو جایشان داده‌ایم، چطور انتظار دارید که مسئله روشن‌تر شده باشد؟

● **من:** از آخرین حرف‌های اعظم و لیلا به نظر می‌رسد که آن‌ها استدلالی کاملاً ریاضی، روشن و ساده نیز دارند که برای مرحله آخر ننگه داشته‌اند. من هم مثل شما قبول دارم آنچه تاکنون گفته‌اند استدلال نبوده است و تنها ممکن است راهنمایی‌هایی برای استدلالشان باشد.

● **سالومه:** خانم، یعنی به نظر شما حرف درستی می‌زنند و باید به راهنمایی‌هایشان توجه کنیم؟

● **من:** بله، بالاخره وقتش رسیده است که استدلال خود را دقیق‌تر بگویند.

● **اعظم:** نخستین جلسه‌ای که خانم احتمال را یاد دادند، به یاد بیاورید. خانم دو تکه گچ، یکی سفید و یکی رنگی را برداشتند و یکی را در دستشان نگه داشتند و از ما خواستند احتمال سفید بودن آن را محاسبه کنیم. اما به عمد جوری دستشان را نگه داشتند که دو نفر با چشم خود سفید بودن گچ را دیدند. معلوم شد که آن دو نفر باید احتمال سفید بودن گچ را صددرصد بدانند و دیگری که گچ را ندیده بودیم، باید همین احتمال را پنجاه درصد می‌دانستیم. گفته شد که دانسته‌های مادر محاسبه‌های احتمال مهم هستند. حالا نگاه کنید. موضوع کیسه کمی گمراهان کرده است. در ریاضیات تا به حال کیسه را تعریف نکرده‌ایم. اهمیتی هم ندارد. مهم این است که مهره‌ها را می‌پوشاند تا رنگ آن‌ها را ببینیم. مهم دانستن یا ندانستن رنگ مهره است، نه جنس و ابعاد کیسه! وقتی مهره‌ها را کف اتاق تاریک، روی طاقچه و ... پخش می‌کنیم، اتفاق جدیدی نیفتاده است. چیزی از رنگ مهره‌ها به دانش ما اضافه نشده است. پس مسئله تغییری نکرده است. یا مثلاً وقتی مهره‌ها را یک یک بیرون می‌کشیم و بدون نگاه کردن به رنگشان در کشو می‌گذاریم تا تنها یک مهره در کیسه باقی می‌ماند، گویی مهره‌ها را از کیسه بیرون نکشیده‌ایم.

اینکه خیلی‌ها اینجا احساس کردند که احتمال قرمز بودن مهره آخر همان  $\frac{5}{12}$  است، به همین دلیل است. خلاصه اینکه وقتی یک مهره را بدون دیدن در کشو جای داده‌ایم، واقعاً به این معنا نیست که این مهره از کیسه خارج شده است. خارج شدن از کیسه اگر بخواهد تأثیری در محاسبه‌ها داشته باشد، باید به معنای دیده شدن رنگش باشد. اگر رنگش دیده نشده، هنوز می‌توانیم فکر کنیم که درون کیسه مانده و واقعاً ۵ مهره قرمز و ۷ مهره آبی درون کیسه است. بنابراین احتمال قرمز بودن مهره‌ای که از کیسه بیرون می‌آید برابر  $\frac{5}{12}$  است.

● **من:** حرفی ندارم. دفاعی کاملاً فنی، دقیق و مبتنی بر تعریف‌ها و مطالب ریاضی انجام شد. خوب به حرف‌های اعظم فکر کنید. لازم نیست چیزی به آن اضافه شود.